**گزارش پروژه: تحلیل گراف‌های Watts–Strogatz**

**خلاصهٔ اجرایی**

در این پروژه با استفاده از مدل Watts–Strogatz سه گراف تصادفی تولید و تحلیل شدند تا تأثیر پارامترهای n تعداد گره‌ها، k (همسایگی اولیه) و p احتمال بازپیوند rewiring بر ویژگی‌های ساختاری شبکه بررسی شود. برای هر گراف شاخص‌هایی مانند تعداد گره‌ها، تعداد یال‌ها، میانگین درجه، ضریب خوشه‌بندی، طول مسیر میانگین و قطر محاسبه شده و نمودار ساختار شبکه رسم شد. هدف فهمیدن چگونگی انتقال رفتار از شبکهٔ مرتب حلقوی (p نزدیک به 0) به شبکهٔ کوچک-جهانی (small-world) و نهایتاً شبکه‌ای تصادفی برای مقادیر بزرگ‌تر p است.

**مقدمه**

مدل Watts–Strogatz برای تولید گراف‌هایی که همزمان خوشه‌بندی بالا و طول مسیر میانگین کم را نشان می‌دهند طراحی شده است؛ ویژگی‌ای که در شبکه‌های واقعی اجتماعی و زیستی مشاهده می‌شود. پارامتر p رفتار شبکه را از مرتبی حلقوی به یک گراف تقریباً تصادفی تغییر می‌دهد و k کنترل‌کنندهٔ چگالی محلی است.

**تعریف مسئله و هدف**

با تولید سه نمونه گراف با پارامترهای متفاوت می‌خواهیم:

* بررسی کنیم چگونه افزایش n و k چگالی و مسیرها را تحت تأثیر قرار می‌دهد؛
* اثر پارامتر p بر ضریب خوشه‌بندی و کوتاه‌شدن مسیرها را مشاهده کنیم؛
* تحلیل کیفی از ساختار شبکه‌ها (قابلیت تشکیل مؤلفهٔ غول‌آسا، خوشه‌بندی محلی، و رفتار small-world) ارائه دهیم.

**پارامترها و کد اجراشده**

پارامترهای مورد استفاده در پروژه به‌شرح زیر بودند:

* WS1: n=100, k=4, p=0.1
* WS2: n=200, k=6, p=0.3
* WS3: n=300, k=8, p=0.05

**تصاویر شبکه‌ها**

* **تصویر 1 — WS1 (n=100, k=4, p=0.1):**

A diagram of a bird

AI-generated content may be incorrect.

* **تصویر 2 — WS2 (n=200, k=6, p=0.3):**

A diagram of a network

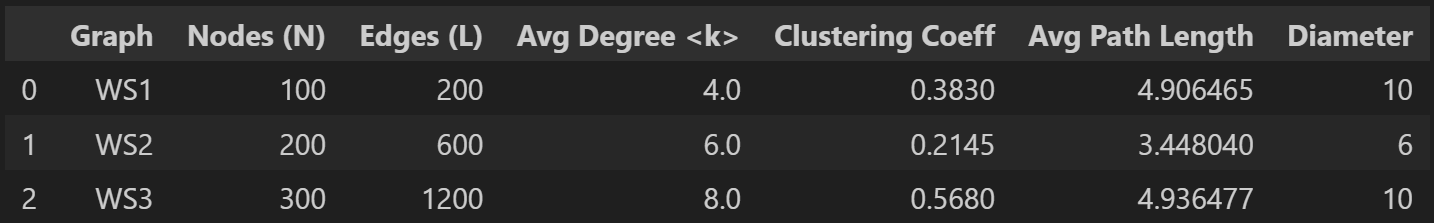
AI-generated content may be incorrect.

* **تصویر 3 — WS3 (n=300, k=8, p=0.05):**

**A diagram of a diagram

AI-generated content may be incorrect.**

**جدول خلاصهٔ نتایج (ws\_graphs\_info)**

****

**تحلیل و تفسیر نتایج**

**تأثیر k (همسایگی اولیه)**

پارامترk تعیین‌کنندهٔ عددی است که هر گره در گراف ابتدایی حلقوی با آن به همسایگان نزدیک خود متصل می‌شود. به‌طور کلی با افزایش k:

* میانگین درجه افزایش می‌یابد (تقریباً برابر با k در گراف WS بدون در نظر گرفتن بازپیوند)؛
* چگالی کلی شبکه بیشتر می‌شود و مسیرهای کوتاه‌تری بین گره‌ها شکل می‌گیرد؛
* ضریب خوشه‌بندی در ساختار اولیه حلقوی بالا است و با بازپیوند‌های تصادفی کاهش می‌یابد اما همچنان برای مقادیر کوچک p بالاتر از مدل‌های کاملاً تصادفی خواهد بود.

**تأثیر p (احتمال بازپیوند)**

پارامتر p نقشی کلیدی در مدل Watts–Strogatz دارد:

* p≈0: ساختار نزدیک به حلقه‌ی مرتب با خوشه‌بندی بسیار بالا و طول مسیر نسبتاً بزرگ.
* مقدار کوچک ولی مثبتِ p (مثلاً 0.01–0.1): شبکهٔ small-world ظاهر می‌شود—ضریب خوشه‌بندی نسبتاً بالا و طول مسیر میانگین بسیار کاهش‌یافته.
* p بزرگ (نزدیک به 1): شبکه رفتاری شبیه Erdős–Rényi خواهد داشت؛ خوشه‌بندی کاهش و مسیرها تصادفی می‌شوند.

در مثال‌های شما WS2 با p=0.3 نسبت به WS1(p=0.1) و WS3(p=0.05) احتمالاً به رفتار تصادفی نزدیک‌تر است و بنابراین ضریب خوشه‌بندی پایین‌تری دارد اما طول مسیر میانگین‌اش ممکن است همچنان کوتاه باشد.

**اتصال‌پذیری و مؤلفه‌ها**

با افزایش n و k احتمال اینکه گراف کاملاً متصل باشد بیشتر می‌شود. با این حال برای pهای کوچک ممکن است مؤلفه‌های جداگانهٔ کوچکی وجود داشته باشد. اگر گراف‌ها قطع‌شده باشند، محاسبهٔ طول مسیر و قطر باید صرفاً روی مؤلفهٔ غول‌آسا صورت گیرد.

**نکات عددی و انتظارات**

* میانگین درجهٔ محاسبه‌شده باید با k هم‌راستا باشد (تقریباً برابر با k برای گراف‌های تولیدشده). اگر مقدار میانگین درجه بسیار متفاوت باشد، احتمال خطا در محاسبه یا وجود یال‌های موازی/جهت‌دار را بررسی کنید.
* ضریب خوشه‌بندی در WS3 با p=0.05 باید از WS1 و WS2 بیشتر باشد (به شرطی که k مشابه یا بیشتر نباشد).

**نتیجه‌گیری**

این آزمایش نشان می‌دهد که مدل Watts–Strogatz ابزاری قدرتمند برای تولید شبکه‌هایی با خوشه‌بندی بالا و طول مسیر کوتاه است و پارامتر p نقش تعیین‌کننده‌ای در تعیین رفتار شبکه از مرتب تا تصادفی دارد. تحلیل دقیق‌تر با تکرارهای آماری و ترسیم منحنی‌های حساسیت می‌تواند نتایج قوی‌تر و قابل‌استنباط‌تری تولید کند.